



TITLE:

大振幅浅水孤立波の不安定 (臨界現象と微分方程式の解の分岐)

AUTHOR(S):

舟久保, 悠子; 皆川, 大輔; 大塚, 一路; 渡辺, 慎介; 辻, 英一; 及川, 正行

CITATION:

舟久保, 悠子 ...[et al]. 大振幅浅水孤立波の不安定 (臨界現象と微分方程式の解の分岐). 数理解析研究所講究録 2001, 1231: 1-8

ISSUE DATE:

2001-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41465>

RIGHT:

大振幅浅水孤立波の不安定

横浜国立大学工学部 舟久保 悠子(Yuko Funakubo)、皆川 大輔(Taisuke Minagawa)
大塚 一路(Kazumichi Ohtsuka)、渡辺 慎介(Shinsuke Watanabe)
Department of Physics, Faculty of Engineering, Yokohama National Univ.

九州大学応用力学研究所 辻 英一(Hidekazu Tsuji)、及川 正行(Masayuki Oikawa)
Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ.

1. 浅水孤立波の安定性問題

浅い水路の表面を伝わる長波長の孤立波である浅水孤立波に関する研究は、長い歴史を持つが、その不安定性に関する研究は比較的新しい。浅水孤立波の不安定性の発端になった研究は、高次の摂動理論にある。高次摂動理論の成果の一つは、孤立波の振幅の増加に従い、孤立波の持つエネルギー、運動量、孤立波の速度などの諸量は増大するが、大きな振幅の領域でこれらの量は極大、極小を持ち、振動することを明らかにしたことである。孤立波の速度 c と長波長極限の線形波の速度 $(gh)^{1/2}$ により定義される Froude 数 $F=c/(gh)^{1/2}$ 、および孤立波の振幅 a を水深 h で規格化した a/h を用いると、Longuet-Higgins と Fenton(1974) [1]は、たとえば、Froude 数は $a/h=0.790$ のとき最大値 $F=1.294$ を持つ。また、孤立波の最大振幅は $a/h=0.827$ であり、そのとき波の速度は $F=c/(gh)^{1/2}=1.286$ となる。

波の持つエネルギーなどの振動は、孤立波の安定性問題へと発展した。浅水孤立波の不安定はエネルギーが最初に最大になる振幅で現れることを Tanaka (1986) [2]が示し、Tanaka, Dold, Lewy & Perigrine (1987) [3]は数値解により不安定の詳細を検討した。エネルギーの最大値を与える振幅は、 $a/h=0.780640$ であり、そのとき波の速度は、 $c/(gh)^{1/2}=1.29385$ である。エネルギーの最大値を与える振幅に対応する速度 $c/(gh)^{1/2}=1.29385$ を、今後、臨界速度と呼ぶことにする。

本研究では、孤立波の安定性問題を実験的に検証し、Tanaka 等による数値解との比較を行う。

なお、本研究の前半部分は数理解析研究所講究録 1209「非線形波動のメカニズムと数理」(2001年5月) pp. 211-222 に詳しく述べられていることをお断りしておく。

2. 実験装置と実験方法

実験は、九州大学応用力学研究所に設置された風洞水槽を使って行われた。水槽の幅は 0.6 m、高さは 0.8 m、全長は 17 m である。この内、水底に給排水用の穴などがなく、水深が一定している 9 m の領域を実験に使った。水深は、0.05 m から 0.1 m の範囲に選んだ。水底に接する幅 0.6 m、高さ 0.5 m の鉛直な造波板を水平方向に変位させることにより浅水波を励起する。なお、風洞は使用しない。

ピストン式造波板の変位 $d(t)$ は、次式に従いコンピュータにより制御される。

$$d(t) = \begin{cases} \frac{A}{2} \tanh\left\{2\pi\left(\frac{t}{t_0} - \frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{A}{2} \tanh \pi, & 0 \leq t \leq t_0 \\ A \tanh \pi, & t \geq t_0 \end{cases}$$

ここで、 A は造波板の変位幅、 t_0 は造波板が A だけ変位するのに要する変位時間である。変位幅の最大値 A_{\max} は 0.25 m、変位時間 t_0 は $1 \text{ sec} < t_0 < 3 \text{ sec}$ である。

波形の時間変化は造波板の初期位置から 1 m 間隔に設置した 9 本の振動容量型波高計により観測する。また、デジタル・ビデオ・カメラを造波板から 6 m に置き、水槽の真横から波形をモニターする。

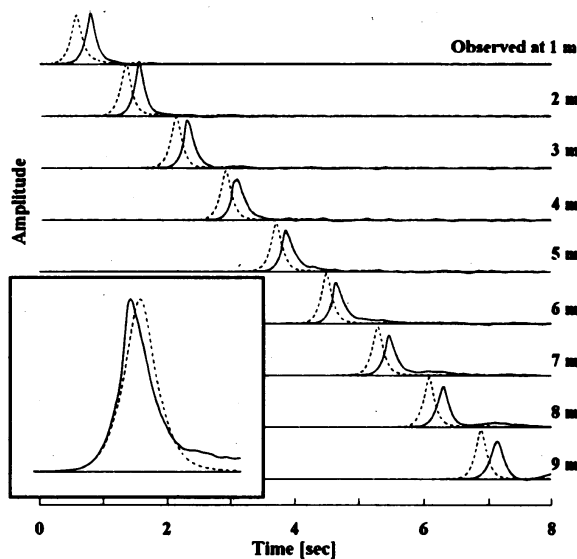


Fig. 1 The propagation of stable (dotted curve) and unstable (solid curve) solitary waves. The magnitude and period of piston displacement are $A=0.25 \text{ m}$ and $t_0=1.2 \text{ sec}$ (stable) or $t_0=1.1 \text{ sec}$ (unstable). The water depth h is 0.1 m. The origin of the abscissa is arbitrarily shifted. In the inlet at the bottom left, the waveform of an unstable solitary wave observed at 6 m (solid curve) is compared with a stable one (dotted curve) of nearly the same amplitude.

3. 実験結果 I 安定な孤立波

安定な孤立波の例を図 1 に破線で示す。水深 h は 0.1 m である。造波機の変位幅は $A=0.25 \text{ m}$ 、変位時間は $t_0=1.2 \text{ sec}$ である。図では、造波機から 1 m (最上段のトレース) から 9 m (最下段のトレース) までの 9 点における波形を時間の関数として示した。安定に伝播する孤立波は、造波機近傍では波形が非対称であるが、後方に振動成分を放出しながら次第に対称な波形に変化する。振幅の変化はわずかであり、8 m 伝播する間に約 7% の振幅減少が観測される。9 m の地点で測定される振幅は、 $a/h=0.66$ である。

安定な孤立波の規格化した速度 $c/(gh)^{1/2}$ を規格化した振幅 a/h の関数として図 2 に示す。孤立波の振幅と速度は波形の対称性が達成された 8 および 9 m において測定した。速度はこれら 2 点における孤立波の時間差から求め、振幅は 2 点の平均値を採用した。実線は Longuet-Higgins と Fenton [1] が与えた理論式であり、2 本の破線の交点は Tanaka [2] によって求められた孤立波の最大振幅とそれに対応する臨界速度である。小振幅領域における孤立波の速度は、Longuet-Higgins と Fenton の理論と良く一致しているが、振幅の増大と共に理論値を上回る。この不一致は、大振幅孤立波

の波動構造の局在化に伴い表面張力の効果が顕在化したためであると考えられる。図2の結果から、安定な孤立波の最大振幅は $a/h=0.70$ であり、それに対応する最大速度は $c/(gh)^{1/2}=1.29$ (より正確には 1.285) である。これらの値は、Tanaka が与えた最大振幅と臨界速度を上回っていない。つまり、彼の理論と矛盾していない。実験から得られる最大振幅 $a/h=0.70$ は理論値 $a/h=0.780640$ に比べかなり小さいが、最大速度 $c/(gh)^{1/2}=1.29$ は臨界速度 $c/(gh)^{1/2}=1.29385$ に極めて近い。

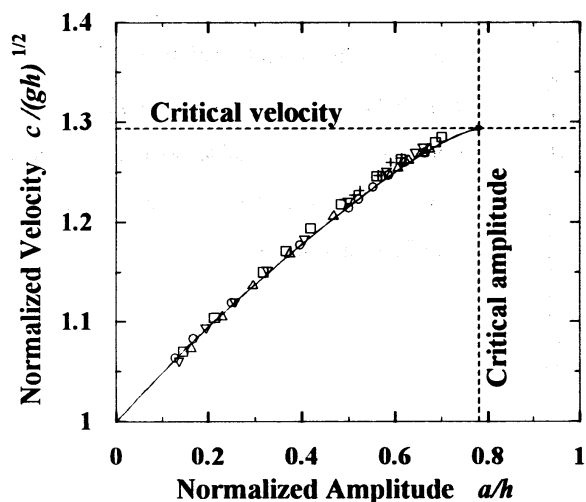


Fig. 2 The velocity $c/(gh)^{1/2}$ of a stable solitary wave as a function of the amplitude a/h . The water depths are 0.1 m (○), 0.09 m (▽), 0.08 m (□), 0.07 m (△) and 0.05 m (+). The solid curve indicates the theoretical value by Longuet-Higgins and Fenton (Ref. 1). The crossed point of two dotted lines denotes the maximum amplitude and velocity of a stable solitary wave by Tanaka (Ref. 2).

4. 実験結果Ⅱ 不安定な孤立波

次に、孤立波の安定性問題に移ろう。図1の実線は、不安定な孤立波の伝播を示す。破線に比べ、ピストンの変位時間を 0.1 sec だけ短くして、孤立波の振幅を増大させている。図1の実線で示した不安定な孤立波は、破線で示した安定な孤立波と比べ、以下に述べる違いがある。1) 造波機からの距離が 1 および 2 m において、実線で示した孤立波の振幅は安定な孤立波の振幅より大きい。3 m 以降では、振幅が急激に減少する。同時に、波形の非対称性が顕著になる。振幅の減少は孤立波の不安定に起因する。2) これと同時に、波頭からリップルが励起され、前方と後方に伝播する。リップルについては後に図4において示す。この結果、孤立波の表面は滑らかでなくなる。リップルは波面前方には孤立波の波高の半分程度まで進み、そこで消える。後方には孤立波の後方まで伝播する。3) 造波機から 4 m の点で、孤立波の後方にプラトーが現れ、距離と共にプラトーは後方に伸びる。4) 孤立波の表面は 8 m で再び滑らかになり、孤立波の波頭からリップルが励起されなくなる。プラトーは孤立波から分離し、第2の小さな孤立波へと変形する。5) 孤立波の波頭からリップルが励起されている間だけ、低周波の可聴雑音が発生する。これは、安定な孤立波における静かな伝播とは対照的である。6) 9 m における孤立波の振幅は $a/h=0.54$ まで減少している。

これらの結果は、孤立波の不安定が造波機から 2、3 m で起き、7、8 m で安定が回復することを示している。不安定は、低周波の可聴雑音を伴うリップルの生成、波高の減少、およびプラトーの形成などの特徴を持つ。

これらの性質は不安定な孤立波に共通して現れる。ただし、不安定の開始位置、安定の回復位

置などは、初期条件により異なる。一般的に、波高の増加に伴い不安定開始位置は造波機側に接近し、短い距離で孤立波は不安定化する。一方、安定性が回復する位置は、初期条件だけで決まらず、一般的にそれを予測することは出来ない。安定回復後における孤立波の振幅についても、それを予測することは困難である。

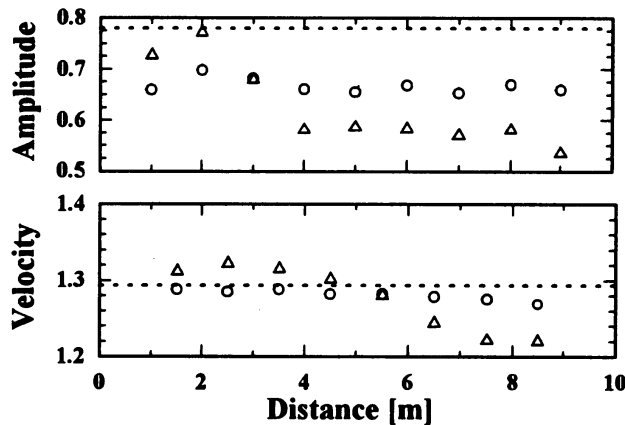


Fig. 3 The spatial evolution of normalized amplitude a/h and velocity $c/(gh)^{1/2}$ obtained from Fig. 1. (○): Stable wave. (△): Unstable wave. The dotted line indicates the critical amplitude or velocity.

5. 実験結果Ⅲ 振幅と速度の空間変化

孤立波の振幅と速度の空間変化を、安定な孤立波と不安定な孤立波を比較しつつ、図3に示す。規格化した振幅と速度は図1の波形から求めた。速度は1 mだけ離れた2点間の伝播時間から求め、それを2点の中間点における速度とした。また、振幅として測定点における波高を示した。安定な孤立波(○で示す)では、振幅と速度は安定な孤立波の最大振幅と臨界速度を越えることはない。速度は臨界速度に極めて接近しているが、振幅は最大振幅よりかなり低い。これは、図2に示した非線形分散式からも予想されることである。安定な孤立波の場合にも、造波機近傍でのみ孤立波の速度が臨界速度を上回るが、短い距離で臨界速度以下まで減少するため、不安定が実際に起こらないことがある。これは不安定開始に時間遅れが存在するためであると予想される。この予想については、すぐ後に再び考察する。

一方、不安定を起こす孤立波(△で示す)の場合は、振幅は最大振幅を越えていないが、速度は造波機から約5 mの位置まで臨界速度を上回っている。これは、不安定は臨界速度により支配され、最大振幅に依存していないことを暗示している。孤立波の不安定は2 mと3 mの間で起こり、7 mと8 mの間で安定化する。つまり、臨界速度以上の速度で2、3 m進んだ後に孤立波は不安定化し、臨界速度以下の速度で同じく2、3 m進んだ後に安定化する。これは、孤立波の不安定化や安定化に、時間遅れが存在することを示している。造波機近傍でのみ臨界速度を上回る孤立波が不安定を起こさない理由は、この時間遅れにより説明できるであろう。さて、不安定な孤立波の振幅と速度について、その空間変化を見てみよう。振幅は不安定の開始直後に急速に減衰するが、5 m以降はほぼ一定の振幅を維持している。それに対して、速度は不安定開始後も急速な変化はなく、緩やかに減少する。不安定の終了点近傍で、速度はやや急速に減少している。振幅と速度のこうした変化に関する理論的な予測はこれまでに与えられていない。

6. 実験結果IV 不安定の発展過程

図4(A)と(B)に不安定の発展過程を示す。不安定開始直後の写真(A)は、水槽の幅の約三分の一にあたる水槽の向こう側の領域で、孤立波は安定を保っているが、手前側の残りの部分はずでにリップルが励起され、不安定化していることを示している。つまり、孤立波の不安定は必ず一方の壁の近傍から始まり、波面に沿って孤立波全体が同時に不安定化することはない。本実験の場合は、必ず、水槽の手前側から不安定は始まる。この非対称性は、実験装置の予期せぬ非対称性が原因であろう。たとえば、造波機に取り付けられたピストンの壁面に対する直交性の不備、あるいは、両壁面の中点とピストンの中心点のずれなどが考えられる。リップルが励起されている領域では励起されていない領域に比べ振幅が減少している。この振幅減少は図1の結果と一致している。さらに、リップルが励起されている領域と励起されていない領域の境界から、リップルは不安定な孤立波の波頭から励起されることが理解される。リップルはその波長が孤立波のそれより十分小さい事実から、表面張力波と解釈される。短波長の表面張力波の速度は浅水波よりも速いから、リップルは孤立波を追い越すと予想されるが、実際には、波高の半分程度まで進むと消滅して、孤立波の前面まで進むことはない。写真(B)から、孤立波の前面を下りながら伝播するリップルが砕波する様子を見ることができる。孤立波の後方から造波機に向かって伝播するリップルは、振幅を次第に減少させ、砕波することはない。波長の長い波だけが最後に残る。

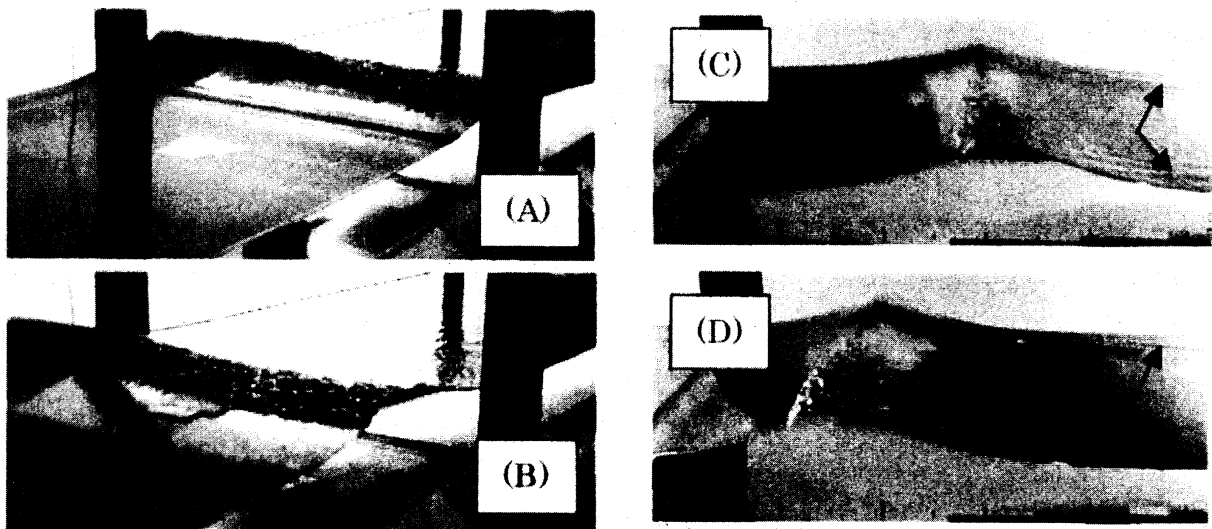


Fig. 4 The front view, (A) and (B), and the side view, (C) and (D), of the evolution of instability. A solitary waves is propagating from right to left between 6 m and 7 m from the wave maker, which is located at the top right in (A) and (B), but is not seen. The arrows in (C) and (D) indicate the stripes of capillary waves. The magnitude and period of piston displacement are $A=0.25$ m and $t_0=1.5$ sec. The water depth h is 0.08 m. The time interval between the pictures is $2/15$ sec. for (A) and (B) and is $1/15$ sec. for (C) and (D).

低周波の可聴雑音は、波頭からリップルが連続的に励起されているときのみ発生する。この雑

音は、巻き込みを起こした流体の一部が砕波により落下し、その下にある流体と衝突する時に発生すると考えられる。そのような過程を考えないと、雑音発生の理由を説明できない。孤立波の後方に進むリップルは雑音を発生しない。

図1左下の囲みにおいて、不安定な孤立波の波形(実線)と、ほぼ同じ振幅を持つ安定な孤立波の波形(破線)を比較した。安定な孤立波はピークに対して左右の振幅がほぼ対称であるが、不安定な孤立波は、鋭い立ち上がりと緩やかな立ち下がりを持っている。つまり、孤立波の不安定は波の突っ立ちと関連している。

波の突っ立ちの過程を次に考察しよう。図4(C)と(D)には、不安定開始直後に側面から観測した孤立波の波形を示した。(C)では、水槽の前面側で孤立波は不安定化し、裏面側ではまだ不安定化していない。この時点で、側面から見た孤立波の波形は対称性を保っている。次の写真(D)では、対称性は崩れ、波面の前面が突っ立っている。また、リップルが砕波を開始している様子も見受けられる。この過程は、はじめにリップルを励起する不安定が起き、つぎに波形の突っ立ちとリップルの砕波が起こることを示している。

以上の観察から実験結果をまとめると以下ようになる。孤立波の不安定は、波頭におけるリップルの励起と孤立波波高の減衰によって始まる。次に、孤立波の突っ立ちが起こり、さらには、リップルの砕波に至る。このような過程を通し、振幅と速度の減少が進むと、孤立波は安定化する。

この結果を Tanaka 等による数値解の結果と比較してみよう。彼らは2種類の不安定の存在を指摘している。砕波を起こす不安定と、減衰を起こす不安定である。前者の不安定は、波頭における波の突っ立ちと、その後続く砕波がその特徴である。我々の実験では、波頭が突っ立つことはなく、砕波に関しても孤立波の砕波ではなく、リップルの砕波である。この意味で、実験結果は Tanaka 等の第一の不安定とは異なる性質を持つ。減衰を起こす第二の不安定の場合、不安定な孤立波は、それとほぼ等しいエネルギーを持ち振幅のより小さい安定な孤立波に滑らかに移行する。波の突っ立ちは起こらない。実験でも、不安定による孤立波の減衰が観測されているが、減衰が極めて大きいため、同じエネルギーを持つ孤立波に変形するとは考えにくいだけでなく、リップルの励起と波の突っ立ち、さらにはリップルの砕波を伴っているため、数値解から予想される第二の不安定とも異なっている。したがって、我々の実験結果は Tanaka 等の数値解と共通点を持たないように見える。そうした相違にも拘わらず、波の突っ立ちや砕波の存在から、実験は第一の不安定に属すると考えられる。両者のあいだに横たわる矛盾の原因の一つは、おそらく、波の規模であろう。より深い水深のもとで、より大きい規模の孤立波を励起すれば、表面張力の効果を回避でき、数値解から予想される不安定を実験的に実現することが可能になるであろう。

なお、Tanaka 等による数値解では、孤立波に対して初期に与える摂動の符号が、砕波を起こす不安定、あるいは減衰を起こす不安定の生起を決定する。実験では、孤立波以外の振動的な波動成分を最小に抑制するようにピストンの変位幅と変位時間を選択しているが、孤立波の成分以外の摂動を制御することを現段階では行っていない。摂動のない単独の孤立波を励起することが不可能であるからである。ピストンの変位幅と変位時間の調整にも拘わらず、実験で初期に流体に与える変位は必然的に孤立波の成分とそれ以外の摂動成分を含んでいる。たとえば、安定な孤立

波の伝播を示す図1の破線の波にも、孤立波以外の振動成分が励起されている。つまり、実験では孤立波と摂動を区別して励起することは不可能である。これには、二つの理由が考えられる。第一は、技術的な問題である。ピストンの変位と流体に与えられる変位の関係は必ずしも明確ではない。我々はピストンの変位として双曲線関数 $\tanh(t)$ を選んだ。変位の時間微分であるピストンの速度が $\text{sech}^2(t)$ となり、孤立波の励起に適しているとの判断からである。その選択はそれなりの成果を挙げたと考えている。たとえば、他の実験でしばしば利用されている正弦関数 $\sin(t)$ をピストンの変位に用いると、必ず2個の孤立波を励起してしまう。それに対して、双曲線関数の場合は、決められた水深に適した変位幅と変位時間を選ぶと、わずかな振動成分を含む単独の孤立波を励起することが可能になる。しかしながら、孤立波に伴う流体は鉛直方向に速度依存性を持つが、実験で初期に与える流体の速度は鉛直方向に一樣である。したがって、ピストンを用いる方法では、不完全な初期波形しか与えられないことになる。第2に、理論的な問題として、大振幅領域において孤立波の波形を簡単な初等関数を用いて表現できていない点が挙げられる。Tanaka 等の数値解では、孤立波の波形を数値計算から求め、それに摂動を加えている。しかしながら、その初期孤立波の波形が簡単に表現できていない。したがって、たとえ決められた波形を実験的に励起することが可能であると仮定しても、理論的な波形を具体的に表現できていないため、摂動のない完全な孤立波を作ることは不可能である。実験では、このような不完全さを避けられないが、それにも拘わらず初期摂動を意図的に孤立波に重畳させることによって、Tanaka 等が数値解で試みた初期摂動に依存する不安定の発展を実験的に検証することは意義のあることであり、今後の実験計画に加えることになろう。

最後に、再度、表面張力の効果について述べよう。図4(C)、(D)において矢印で示した筋状の波に注目しよう。筋状の波は孤立波の前面の波頭近傍から出現している。しかも、両側の壁近傍を出発点にしている。波長が孤立波の大きさに比べ十分小さいことから、この波も表面張力波であると考えられる。この筋状の波は、孤立波が安定に伝播するときに励起され、不安定化してリップルが出現すると消える。図4(C)では、前面と裏面の壁付近から水槽の内部に伝わる筋状の波が2本観測される。(D)では、不安定のため、前面の壁から出る波は消えかかり、裏面の壁から出る筋のみが明瞭に見られる。この筋状の波が孤立波の不安定化の引き金になっている可能性も否定できない。

これまでの議論から、Tanaka 等による数値解と実験結果の相違が明確になったと考える。数値解は2次元のポテンシャル流に基づいている。一方、実験は3次元性、壁や底の効果、表面張力と粘性などの効果など、物の存在と性質に由来する影響から免れることはできない。こうした物の存在による効果を取り入れた理論、ないしは数値計算により、実験結果と数値解の間にある不一致が解消されることを期待したい。

7. 結論

大振幅浅水孤立波の不安定をはじめて実験的に観測した。孤立波の不安定は、波頭におけるリップルの励起と孤立波の振幅減衰、孤立波の突っ立ち、波面前方におけるリップルの碎波とそれに伴う低周波可聴雑音の発生などの特徴を持つ。実験結果に対する理論的解釈は現段階では十分

本実験は、九州大学応用力学研究所における共同研究により実施された。同研究所、増田章教授のご援助に感謝申し上げます。また、実験遂行に当たり、同研究所技官丸林賢次氏、石橋道芳氏の技術面でのご援助とご忠告に感謝致します。

参考文献

- [1] M. S. Longuet-Higgins and J. D. Fenton: Proc. R. Soc. Lond. A. **340** (1974) 471-493.
- [2] M. Tanaka: Phys. Fluids **29** (1986) 650-655.
- [3] M. Tanaka, J. W. Dold, M. Lewy and D. H. Perigrine: J. Fluid Mech. **185** (1987) 235-248.